بعض التعاريف والمصطلحات:

1) نرمز بـ C لمجموعة كل المتتاليات المتقاربة

" " C_0 " " " " من الصفر.

2) " " S " " متتاليات كوشي.

3) نرمز لمجموعة كل المتتاليات المحدودة بالرمز l_∞

4) γ مجموعة كل المتتاليات $a=\{a_k\}$ والتي يكون لأجلها المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقاربة.

أي:

$$\gamma = \{a ; S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \in C ; \forall n \in N\}$$

أو:

$$\{a ; \{S_n\} \in C ; S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ; \forall n \in N\}$$

أو:

$$(*) \quad C_0 \supset \gamma = \{a=\{a_k\} ; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ متقاربة}\}$$

5) l_p حيث $(0<p<\infty)$ هي

$$l_p = \{a=\{a_k\} ; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\}$$

اذا كان $p=1$

$$l_1 = \{a=\{a_k\} ; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\}$$

أما إذا كان $1<p<\infty$:

$$a=\{a_n\}$$

$$\lim_{p\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right|^{\frac{1}{p}} = \sup_{k} |a_k| < \infty$$

$\Rightarrow$ l_∞ هو l_p عندما $p\to\infty$.

$$l_1 \subset l_p \subset l_\infty \quad (**)$$

بعض المتراجحات

[1] اذا كان $a,b \in \mathbb{C}$ فإن: $|a+b| \le |a| + |b|$.

نعلم أن $-|a| \le a \le |a|$.

لدينا $|a+b|^2 = |a+b| \cdot \overline{|a+b|} = |a+b|\,|\bar{a}+\bar{b}|$

$= a\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{b} + b\bar{a}$

$= |a|^2 + |b|^2 + 2\,Re(a\bar{b}) \leq$

$\leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a.b|$

$\leq (|a| + |b|)^2 \Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b| \; ; \; \forall a,b \in \mathbb{C}.$

ملاحظات:

① $\mathbb{Q}$ هي مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$ وقابلة للعد (بين أي عددين عاديين يوجد عدد غير منتهٍ من الأعداد العادية).

② $\mathbb{Q}^c$ مجموعة الأعداد غير العادية هي أيضاً كثيفة في $\mathbb{R}$ ولكنها غير قابلة للعد.

الإثبات:

$\forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} ;$

$\frac{x}{\sqrt{2}} < z < \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow x < z\sqrt{2} < y$

$z\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$

غير قابلة للعد لأن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ و $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد و $\mathbb{Q}$ قابلة للعد

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^c$ غير قابلة للعد.

③ أي متتالية كوشي تكون محدودة.

تعريف النهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية.

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\geq 1}(\sup_{n\geq k} x_n).$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\geq 1}(\inf_{n\geq k} x_n)$

مثال: المتتالية $\{(-1)^n\}$ إذا كان n زوجي فإن:

$= \{1,1,1,\dots\} \to 1$

$\{-1,-1,\dots\} \to -1$: n فردي $\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1.$$

أخذنا متتاليات جزئية وحسبنا نهاياتها تأخذ أعظم قيمة هي العليا و أصغر قيمة هي الدنيا. تكون المتتالية متقاربة اذا تساوت النهايتان.

تمرين:

$\{\cos\frac{n\pi}{6}\}$ حيث $n \in N$ حدد النهاية العليا والنهاية الدنيا.

مبرهنة (1):

دوماً $C \subseteq S \subset l_\infty$ في R أو C.

الإثبات: نعلم أن كل متتالية متقاربة كوشية. بالتالي $C \subset S$ (1).

ومن جهة ثانية لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) ; \forall m,n \in N ; m > N(\varepsilon) , n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

بشكل خاص اذا كان $\varepsilon = 1$ يوجد $N_0 = N(1)$ يكون لدينا:

$$|x_n - x_m| < 1 ; \ n,m > N_0(1).$$

نعلم أن:

$$\big||x_n| - |x_m|\big| \le |x_n - x_m| < 1.$$

وبشكل خاص إذا كان $m = N_0$ يكون:

$$|x_n| < 1 + |x_{N_0}| ; \ n > N_0 ,$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \in l_\infty , \Rightarrow S \subset l_\infty .$$

وباعتبار أن المتتالية المفروضة كوشي فهي محدودة. وبالتالي

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 ; \ x_n < x_m + \varepsilon ; \ \forall n,m > n_\varepsilon .$$

$$\Rightarrow x_n > x_m - \varepsilon ; \ n,m > n_\varepsilon .$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n < x_m + \varepsilon \quad (1)$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n > x_m - \varepsilon . \quad (2)$$

الموضوع .... التاريخ / / 201

وبطرح ② من ① نجد:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n < 2\varepsilon.$$

وبما أن اختيار العدد الموجب ε يمكن اختياره صغيراً بقدر ما يمكن نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n \Rightarrow \{x_n\} \in C \Rightarrow$$

$$S \subset C \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن: $S = C \subset l_\infty$.

تكملة المتراجحات الشهيرة:

2

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

الإثبات:

لنأخذ الدالة المساعدة الآتية:

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \; ; \; t > -1.$$

هذه الدالة قابلة للاشتقاق:

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \; ; \forall t > -1 \Rightarrow \text{الدالة متزايدة.}$$

$$\Rightarrow f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|) \Rightarrow$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

إذا صغرنا المقام يكبر الكسر. نصغر المقام بحذف أحد الحدود:

$$\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

فالمتراجحة محققة.

تعريف العددين المترافقين:

نقول إن العددين الموجبين p, q مترافقان إذا كان $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

حيث: $(p > 1)$.

كما أن: بتوحيد المقامات: $pq = p + q$

لذلك: $p = q(p-1)$, $q = p(q-1)$.

3

$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

الإثبات: لنأخذ الدالة المساعدة الآتية:

$f(t) = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} t - t^{\frac{1}{p}}$

$f'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1}$; $0<t<1$

$= \frac{1}{p}\left(1 - t^{\frac{1}{p}-1}\right) < 0$; $0<t<1$

لدينا:

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$\frac{1}{p} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{p} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - 1 < 0$.

$r = \frac{1}{t} > 1$; $0<t<1$

$t^{\frac{1}{p}-1} = r^{1-\frac{1}{p}} > 1 \Rightarrow 1 - r^{1-\frac{1}{p}} < 0 \Rightarrow 1 - t^{\frac{1}{p}-1} < 0$.

$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{p}\left(1 - t^{\frac{1}{p}-1}\right) < 0$; $0<t<1$

$\Rightarrow f'(t) \ge 0$; $t \ge 1$, $\Rightarrow$ الدالة غير متناقصة من أجل $t \ge 1$

متزايدة nondecreasing

$f(t) \ge f(1) \ge 0$.

وبالتالي من أجل $1 \le t$ يكون:

$t^{\frac{1}{p}} \le 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} t$

① إذا كان ... نضع ما المتراجحة نفسه ونصل إلى المساواة.

$$\frac{a^p}{p} \geq 0.$$

أما إذا كانت $b \neq 0$ ولنأخذ

$$t = a^p b^{-q} \Rightarrow (a^p b^{-q})^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}(a^p b^{-q}).$$

$$a \cdot b^{-\frac{q}{p}} \leq \underbrace{1 - \frac{1}{p}}_{\frac{1}{q}} + \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} \Rightarrow a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

وتتحقق المساواة إذا جعلنا $t=1$ وأخذنا $t = a^p b^{-q}$ ⇐

$$a^p b^{-q} = 1 \Rightarrow a^p = b^q$$

فالمتراجحة المفروضة تتحول إلى مساواة وذلك هو الحل!

4 متراجحة هولدر للمجاميع:

ليكن $p > 1$ ، q المرافق له أي $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ وإذا كانت الأعداد: $a_k > 0,\ b_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \max_{1 \leq k \leq n} b_k. \qquad (2)$$

الإثبات: فلدينا:

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \qquad (3)$$

إذا وضعنا:

$$A = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad B = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(الأعداد a_k ، b_k ليست كلها معدومة).

وبالتعويض في (3) نجد أن:

$$\frac{a_k \cdot b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_k}{p\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{b_k}{q\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

بأخذ مجموع الطرفين:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{(\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_k^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{(\sum a_k^p)} + \frac{\sum b_k^q}{q(\sum b_k^q)}$$

و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

لو ضربنا الطرفين بمقام الطرف الأيسر فنجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le (\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum b_k^q)^{\frac{1}{q}}.$$

5 قاعدة هولدر للتكاملات:

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

نعوض أن:

$$A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\frac{|f(x)\cdot g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le$$

$$\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

بتكامل الطرفين:

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le$$

الموضوع   التاريخ   /   /

$$\le \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx}\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{q}\,\frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$ متراجحة هولدر للتكاملات محققة.

متراجحة منيكوفسكي:

نفرض أنه $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ وكانه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$a_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$

$b_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

الإثبات: بشكل خاص إذا كانه $p = 1 \Leftarrow$

$$\sum (a_k + b_k) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

أما إذا كانت $p \neq 1$: